CCP PC 2019 exo 3

I/

Q28. • À l'étape $n=0$, le pion est en A donc $\boxed{p_0 = 1 \text{ et } q_0 = r_0 = 0}$

• À l'étape $n=1$, le pion a une chance sur deux d'être resté en A donc $\boxed{p_1 = \frac{1}{2}}$ et sinon il s'est déplacé de manière équiprobable en B ou C donc $\boxed{q_1 = r_1 = \frac{1}{4}}$.

Q29. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n), on a

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$

$$= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n$$

car $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$ est la probabilité de rester en A entre les étapes n et $n+1$

$P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$ est la probabilité de passer de B (ou C) à A entre les étapes n et $n+1$.

De même, on obtient

$$q_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n$$

et $$r_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n.$$

Ainsi $$V_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \boxed{M.V_n}$$

Q30. • Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: « $V_n = M^n.V_0$ »

Initialisation : $M^0.V_0 = I_3.V_0 = V_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie

Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$V_{n+1} \overset{Q29}{=} M.V_n \overset{\mathcal{P}(n)}{=} M.M^n.V_0 = M^{n+1}.V_0.$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = M^n.V_0}$.

• D'après Q28, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où avec l'expression de M^n admise, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{p_n = \frac{4^n+2}{3\times 4^n} \qquad q_n = r_n = \frac{4^n-1}{3\times 4^n}}$

Q31. On a $4^n+2 \underset{+\infty}{\sim} 4^n$ et $4^n-1 \underset{+\infty}{\sim} 4^n$ d'où

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{3}}$ Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'étapes, le pion a <u>autant de chance de se trouver en A, en B ou en C.</u>

<u>Bonus</u> : Comment trouver l'expression de M^n en fonction de n.

- La matrice $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est <u>symétrique réelle</u> donc, d'après le théorème spectral elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (et on pouvait choisir une matrice de passage orthogonale si on voulait).

- <u>Calcul des vp</u> : $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M) = \begin{vmatrix} \lambda-\frac{1}{2} & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & \lambda-1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & \lambda-1/2 \end{vmatrix}$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ -1/4 & \lambda-1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & \lambda-1/2 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2-C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3-C_1}}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & \lambda-1/4 & 0 \\ -1/4 & 0 & \lambda-1/4 \end{vmatrix} \underset{\text{matrice triangulaire}}{=} (\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)^2$$

Donc $Sp(M) = \left\{1 ; \frac{1}{4}\right\}$ avec $m_1 = 1$ et $m_{1/4} = 2$

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(M) \iff M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \underset{\times 4}{\iff} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x+y+z = 4x \\ x+2y+z = 4y \\ x+y+2z = 4z \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} -2x+y+z = 0 \\ x-2y+z = 0 \\ x+y-2z = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1+2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_2}}{\iff} \begin{cases} -3y+3z = 0 \\ x-2y+z = 0 \\ +3y-3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$ donc $E_1(M) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

De manière analogue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{1/4}(M) \iff \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \underset{\times 4}{\iff} \dots$ et on trouve $E_{1/4}(M) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

- Ainsi $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- On calcule P^{-1} par pivot de Gauss, on trouve $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

- Par récurrence facile (à faire !), on a $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}$

Comme on connaît P, P^{-1} et $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix}$, il suffit d'effectuer les produits matriciels pour obtenir l'expression donnée.

II/

Q32. Comme X_i $(i \in \mathbb{N}^*)$ vaut 1 si le pion est en A à l'étape i et 0 sinon $X_1 + \dots + X_n$ est le <u>nombre de passages en A du pion lors des n premières étapes</u>. Par conséquent $E(X_1 + \dots + X_n)$ est le <u>nombre moyen de passages en A du pion lors des n premières étapes</u>.

Q33. Par définition X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A_n) \overset{Q30}{=} \frac{4^n+2}{3\times 4^n}$

donc $\boxed{E(X_n) = \frac{4^n+2}{3\times 4^n}}$.

Q34. On a $a_n \overset{\text{déf}}{=} E(X_1 + \dots + X_n) \overset{\text{linéarité}}{=} E(X_1) + \dots + E(X_n)$

$$\overset{Q33}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{4^i+2}{3\times 4^i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^i\right) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^i$$

$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

$$= \frac{n}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1-(1/4)^n}{1-1/4} = \boxed{\frac{n}{3} + \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}$$

III/

Q35. • Comme le pion est en A à l'étape 0, on a $P(T_B = 1) = P(B_1) = \boxed{\frac{1}{4}}$.

• $P(T_B = 2) = P(\overline{B_1} \cap B_2) = P((A_1 \cup C_1) \cap B_2)$ (dessiner si besoin)

$= P((A_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap B_2))$ évènements incompatibles

$= P(A_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap B_2)$

$= P(A_1)P_{A_1}(B_2) + P(C_1)P_{C_1}(B_2)$

$\overset{\text{cf Q28 \& 29}}{=} \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$

$= \boxed{\frac{3}{16}}$

Q36. Si le pion n'est pas en B à l'étape n c'est qu'il se trouve en A ou C

<u>ie</u> $\boxed{\overline{B_n} = A_n \cup C_n}$.

Q37 . $P(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) \overset{Q36}{=} P(B_3 \cap (A_2 \cup C_2) \cap (A_1 \cup C_1))$ analogue à Q35

$$= P(B_3 \cap A_2 \cap A_1) + P(B_3 \cap A_2 \cap C_1) + P(B_3 \cap C_2 \cap A_1) + P(B_3 \cap C_2 \cap C_1)$$

Ensuite $P(B_3 \cap A_2 \cap A_1) = P(A_1 \cap A_2)\, P_{A_1 \cap A_2}(B_3)$

$= P(A_1 \cap A_2)\, P_{A_2}(B_3)$ la position d'un pion ne dépend que de l'étape précédente, pas de celles d'avant.

$= P(A_1 \cap A_2) \times \frac{1}{4}$.

Le résultat est analogue pour les trois autres termes de la somme.

~~Ainsi~~ $\cancel{P(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \frac{1}{4} P(A_1 \cap A_2) + \frac{1}{4} P(A_1 \cap B_2) + \frac{1}{4} P(A_2 \cap C_1) + \frac{1}{4} P(A_2 \cap B_2)}$

~~incompatibilité~~ $\cancel{= \frac{1}{4} P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2))}$

Ainsi $P(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \frac{1}{4} P(A_1 \cap A_2) + \frac{1}{4} P(C_1 \cap A_2) + \frac{1}{4} P(A_1 \cap C_2) + \frac{1}{4} P(C_1 \cap C_2)$

$$\overset{\text{incompatibilité}}{=} \frac{1}{4} P((A_1 \cap A_2) \cup (C_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap C_2))$$

$$= \frac{1}{4} P((A_1 \cup C_1) \cap (A_2 \cup C_2))$$

$$= \boxed{\frac{1}{4} P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})}$$

• Par définition d'une probabilité conditionnelle, on en déduit $\boxed{P_{\overline{B_1} \cap \overline{B_2}}(B_3) = \frac{1}{4}}$.

Q38 . Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $P(T_B = k) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k)$ définition de la probabilité conditionnelle

$= P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right) \times P\left(B_k \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right)$ résultat admis dans l'énoncé

$= \frac{1}{4} P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right)$

formule des probabilités composées $= \frac{1}{4} P(\overline{B_1}) . P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) . P_{\overline{B_1} \cap \overline{B_2}}(\overline{B_3}) \cdots P\left(\overline{B_{k-1}} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k-2} \overline{B_i}\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, P\left(\overline{B_n} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{B_i}\right) = 1 - P\left(B_n \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{B_i}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ admis dans l'énoncé

$= \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{3}{4}$

$= \boxed{\frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}$

• On a alors $P(T_B=0) = 1 - P(T_B \geq 1)$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_B = k)$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \quad \text{) série géométrique}$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \frac{1}{1-\frac{3}{4}}$$

$$= \boxed{0}$$

(Cela signifie que la probabilité que le pion ne soit jamais en B est nulle.)

Q39 - On a $T_B(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (car $P(T_B=0)=0$) et $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$P(T_B = k) \overset{Q38}{=} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ ie T_B suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$.

En particulier T_B admet une espérance et $E(T_B) = \frac{1}{1/4} = \boxed{4}$

Rq : * Cela signifie qu'en moyenne le pion se trouve en B pour la première fois à la quatrième étape.

* Si on ne voit pas la loi géométrique, il faut faire le calcul à la main, cela revient à démontrer la formule du cours concernant l'espérance d'une loi géométrique (on passe par une série entière que l'on dérive terme à terme).